3ème Maths : M2
Durée : 2heures
Date : le 22 / 04 / 2008
Coefficient : 4

Devoir de contrôle N°3
Mathématiques

Exercice 1 : (3 points)

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(2,3,-3)$; $B(3,4,2)$; $C(3,7,-4)$ et $S(3,4,-3)$.

1) Montrer que A , B et C définissent un plan et que $SABC$ est un tétraèdre.

2) Soit $\vec{u}=\left(-2m^2-3\right)\vec{i}+6\vec{j}+m\vec{k}$

Déterminer le réel m pour que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 2 : (5 points) (les parties I et II sont indépendantes)

I – 1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 9 divise 10^n-1

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 10^n+2 par 9.

II – n est un entier naturel supérieure ou égale à 2.

1) Montrer que n et $2n+1$ sont premier entre eux.

2) On pose $x=n+3$ et $y=2n+1$ et on note $\delta=x\wedge y$.

a - Calculer $2x-y$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b - Montrer que x et y sont multiple de 5 **si et seulement si** $(n-2)$ est multiple de 5.

3) On considère les nombres a et b définis par : $\begin{cases} a=n^3+2n^2-3n \\ b=2n^2-n-1 \end{cases}$

Montrer après factorisation , que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

4) *a* - On note $d=n(n+3)\wedge(2n+1)$. Montrer que $d=\delta$.

b - En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c - **Application :** Déterminer Δ pour $n=2008$ puis pour $n=2007$.

Exercice 3 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

1) Etudier les variations de f.

2) *a*- Donner une équation de la tangente T à la courbe C de f au point d'abscisse 0.

b- Etudier la position de T par rapport à C.

c- Construire C et T.

3) On considère la suite U, définie par : $\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$; $n\in N^*$

a - Démontrer que $\forall n\in N^*$, on a $0\le U_n\le 1$.

b - Etudier la monotonie de la suite U.

4) a- Prouver que : $\forall n \in N^*, f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}$.

b- Montrer par récurrence que : $\forall n \in N^*, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) a- Prouver que : $\forall n \geq 1, on\ a : \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = 1 + U_n$.

b- En déduire que : $\forall n \geq 2, on\ a : \frac{1}{U_n} = \sum_{k=1}^{n-1} U_k + n$

Exercice 4 : *(6 points)*

Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - U_n^{\ 2}}} \end{cases}$; avec $a \in IR \setminus \{-2, 2\}$

1) Déterminer a pour que la suite U soit constante.

Pour la suite de l'exercice on considère $a = 0$ **:**

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ on a : $0 \leq U_n < \sqrt{2}$.

3) Soit la suite V définie sur IN par : $V_n = \frac{3U_n^{\ 2}}{2 - U_n^{\ 2}}$.

a - Montrer que V est une suite arithmétique de raison 3.
b - Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
c - Calculer alors $\lim_{n \to +\infty} U_n$

4) a- Vérifier que $\forall n \in IN,\ U_n^{\ 2} = 2 - \frac{2}{n+1}$.

b- Pour $n \in IN^*$, on pose $S_n = U_0^{\ 2} + U_1^{\ 2} + U_2^{\ 2} + ... + U_{n-1}^{\ 2}$

Montrer que pour out $n \in IN^*$, on a : $S_n = 2n - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$

5) Soit la suite W définie sur IN^* par : $W_n = U_1^{\ 2} \times U_2^{\ 2} \times ..... \times U_n^{\ 2}$.

a - Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN^*$, $W_n = \frac{2^n}{n+1}$.

b - Calculer $\lim_{n \to +\infty} nW_n$.

Facultatif : *(2 points)*

6) Soit la somme : $T = \sum_{k=4}^{30} \frac{1}{\sqrt{V_k} + \sqrt{V_{k-1}}}$

- Montrer que pour tout $k \in IN*$, $\frac{1}{\sqrt{V_k} + \sqrt{V_{k-1}}} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{3}}$.
- En déduire que $T = \sqrt{10} - 1$.